

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
LICENCIATURA EN CIENCIA DE DATOS

Guía para ETS de Métodos Numéricos

NOTA: A menos que se indique lo contrario, utilice aritmética de truncamiento a 5 decimales.

PRIMER PARCIAL

1.- Considerando una representación de números de punto flotante de 32 bits, en la que se tiene la siguiente especificación:

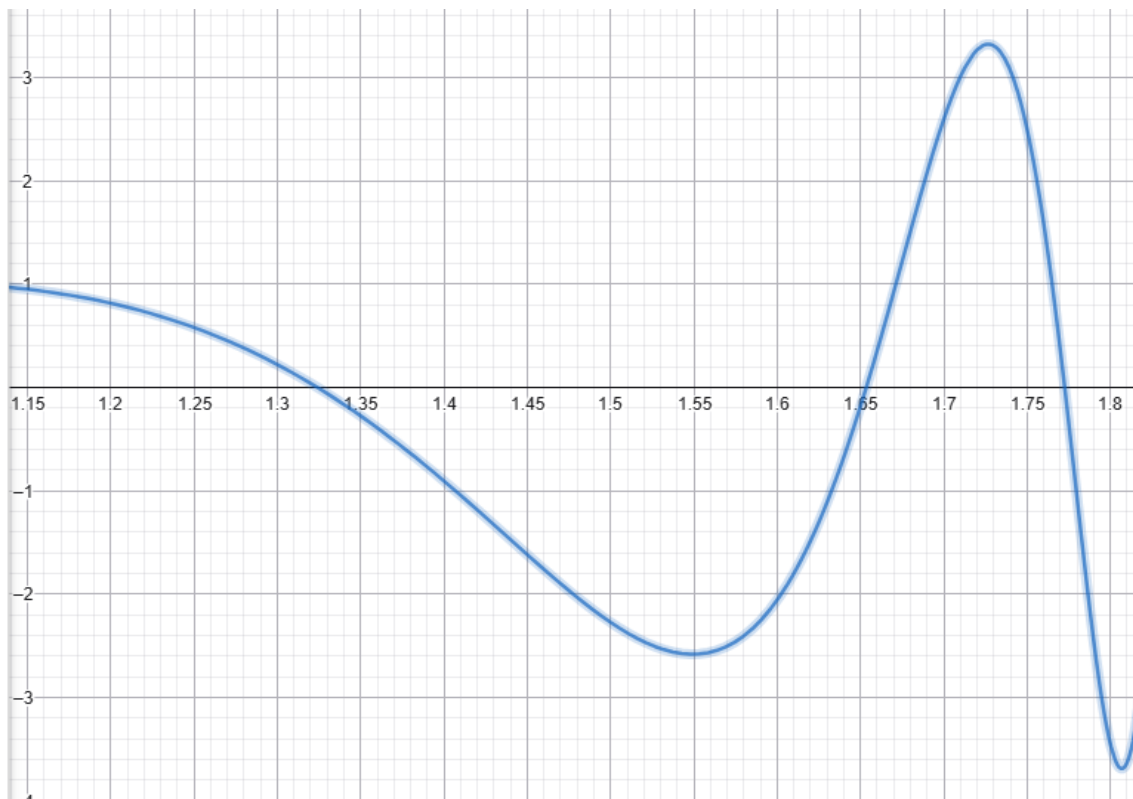
Elemento	Número de bits
Bit de signo	1
Exponente (Característica)	11
Parte fraccionaria(Mantisa)	20

- a) Obtenga la representación binaria (**normalizada**) del número 2465.87543
- b) Obtenga el número decimal inmediatamente menor y el número inmediatamente mayor a:

1 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0

2.-a) Calcule el número mínimo de iteraciones que se requiere para obtener una aproximación **a una raíz** de

$$f(x) = \frac{7x^2}{x-8} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2-6}{x-2}\right) \quad \text{con un error máximo de } 1 \times 10^{-7}, \text{ aplicando bisección.}$$



b) Calcule 3 iteraciones considerando el intervalo que utilizó en el inciso a)

3.- El problema de encontrar la raíz de una función $f(x)$ se puede transformar en un problema de encontrar un punto fijo de una función $g(x)$. Para encontrar una raíz de la función:

$$f(x) = 7x^5 - 5x^3 + 6x^2 - 20$$

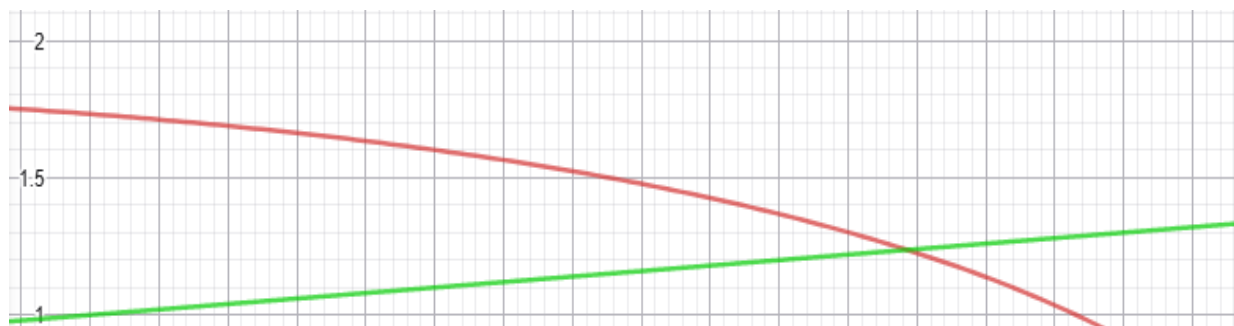
Podemos transformar, mediante operaciones algebraicas, este problema en uno de punto fijo.

- a) Determine para cuales de las siguientes funciones $g(x)$ se puede garantizar la convergencia de la iteración de punto fijo en un intervalo $[a, b]$, justifique sus respuestas. En los casos donde se cumplan las condiciones de existencia, unicidad y convergencia indique el intervalo $[a, b]$. Utilice Geogebra u otro software para obtener gráficamente el máximo del valor absoluto de la derivada de la función.

NOTA: En todas las gráficas la línea de color verde corresponde a la grafica de $y = x$

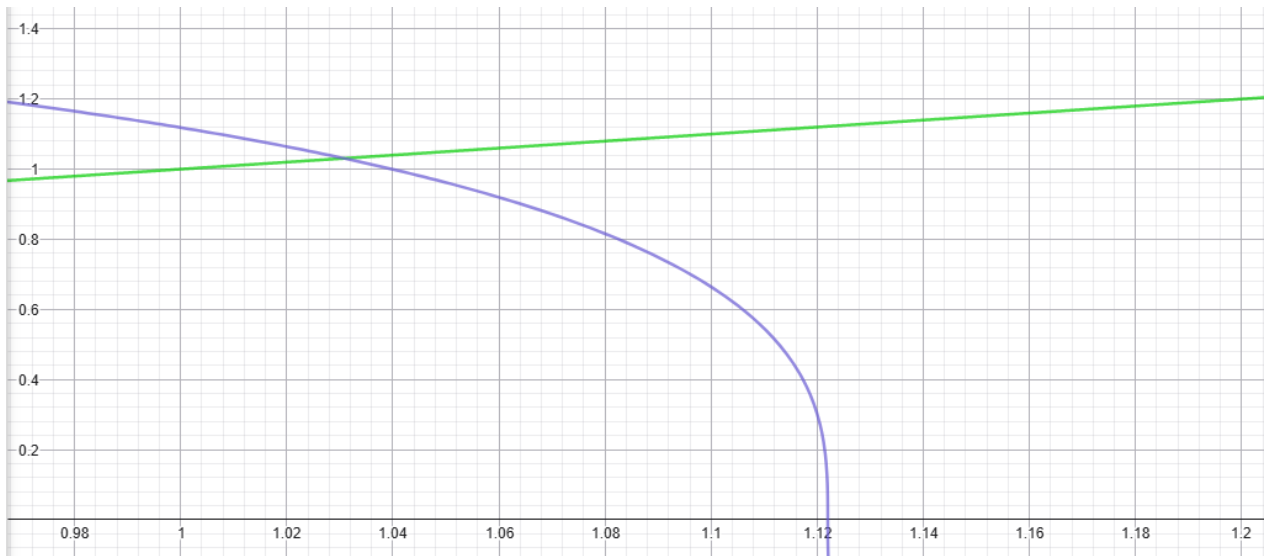
a.1)

$$g_1(x) = \left(\frac{20 + 5x^3 - 7x^5}{6} \right)^{\frac{1}{2}}$$



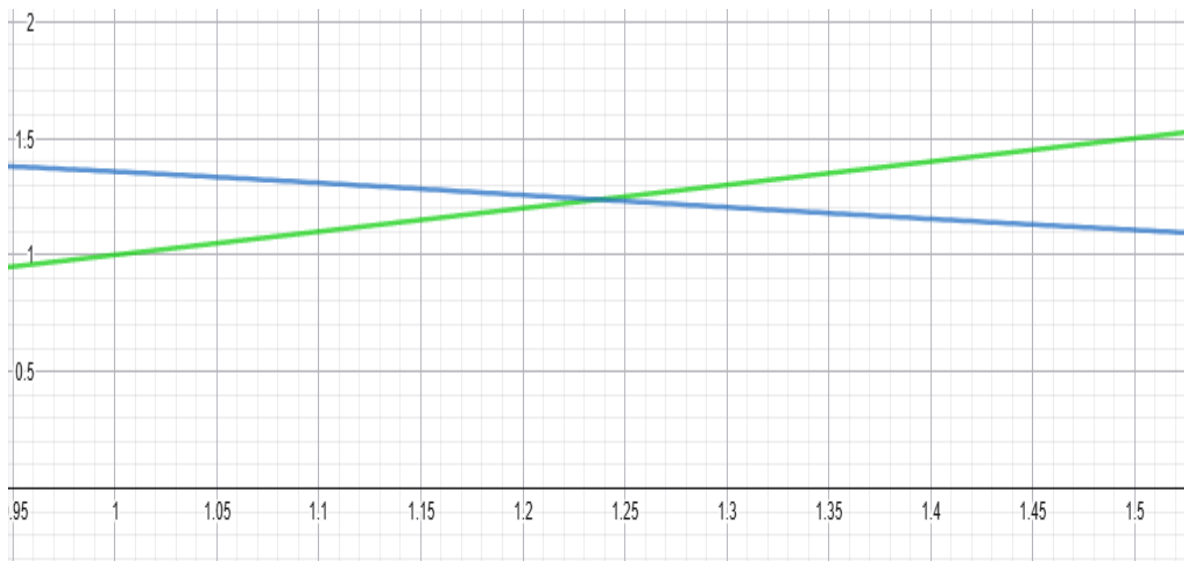
a.2)

$$g_2(x) = \left(\frac{20 - 6x^2 - 7x^5}{5} \right)^{\frac{1}{3}}$$

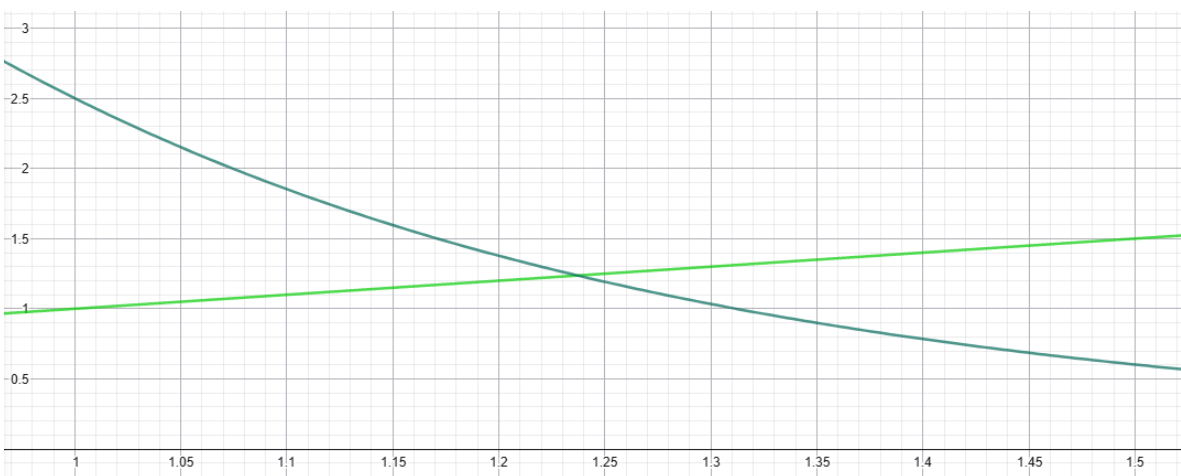


a.3)

$$g_5(x) = \left(\frac{20}{7x^2 - 5 + \frac{6}{x}} \right)^{\frac{1}{5}}$$

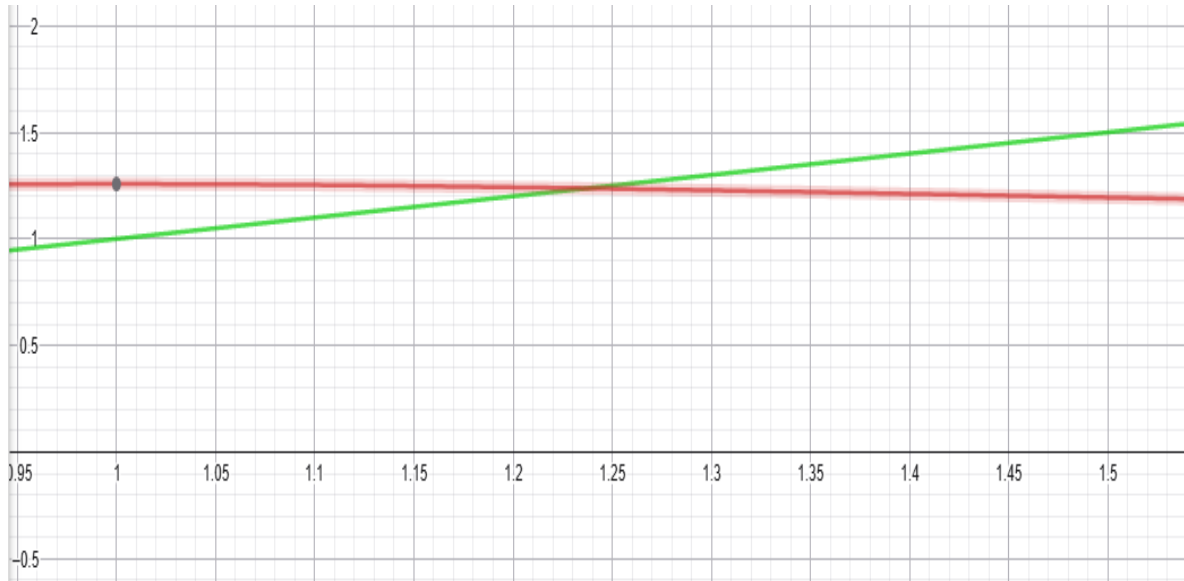


a.4) $g_4(x) = \frac{20}{7x^4 - 5x^2 + 6x}$



$$g_6(x) = \left(\frac{20}{7x - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

a.5)



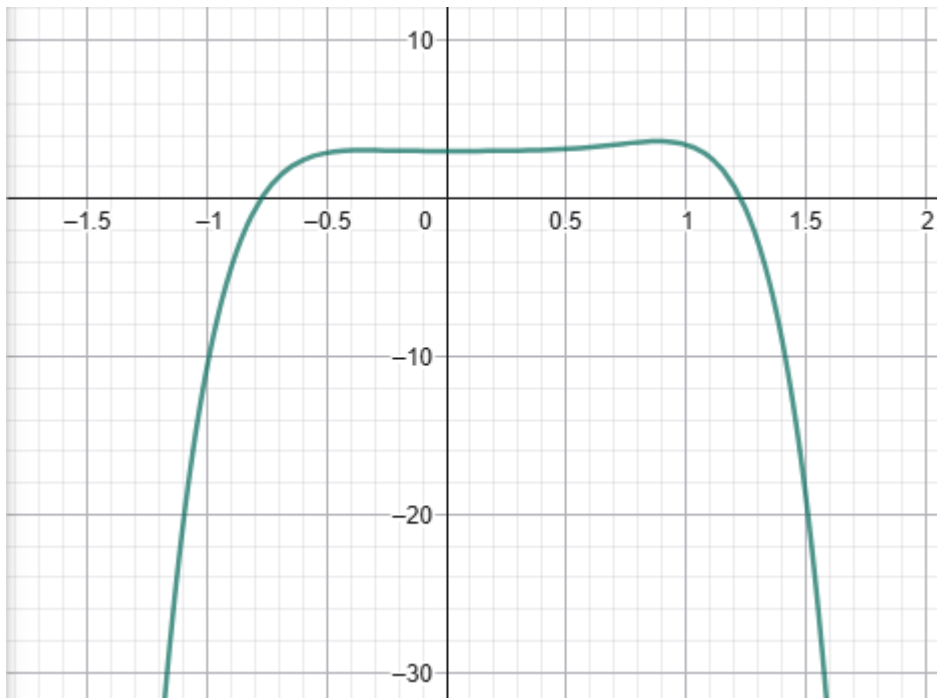
b) Considerando las funciones para las que se garantiza la convergencia de la sucesión de punto fijo en un intervalo $[a,b]$, determine el número mínimo de iteraciones que se requieren para obtener una aproximación al punto fijo, con un error máximo de 1×10^{-9}

c) Obtenga el punto fijo con un error máximo de 1×10^{-5} , de la funciones $g(x)$ para las cuales se cumplieron las condiciones de existencia y de unicidad del punto fijo en un intervalo $[a,b]$

4) Obtenga las aproximaciones, utilizando el método de secante, de 2 raíces de la función

$$f_2(x) = -7x^6 + 8x^5 - x^3 + \ln(10x^2 + 20)$$

Con un error máximo de 1×10^{-4}



5) Resuelva e problema 4 aplicando el método de la falsa posición

6) Aplique deflación y el método de Newton-Raphson para obtener todas las raíces del polinomio: $P(x) = 30x^3 - 325x^2 + 1170x - 1400$, con un error máximo de 1×10^{-5}

6) Resuelva el siguiente problema utilizando el método de la secante. Error máximo de 1×10^{-4}

En el diseño de los vehículos todo terreno, es necesario considerar la falla del vehículo al tratar de superar dos tipos de obstáculos. Un tipo de falla recibe el nombre de *falla compleja* y se presenta cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que causa que la parte inferior del vehículo toque el suelo. El otro tipo recibe el nombre de *falla de nariz* y se presenta cuando el vehículo desciende en una zanja y su nariz toca el suelo.

La figura de acompañamiento, adaptada de [Beck], muestra los componentes relacionados con la falla de nariz de un vehículo. En esta referencia, se muestra que el ángulo máximo a que un vehículo puede superar cuando β es el ángulo máximo en el que la falla compleja no ocurre satisface la ecuación

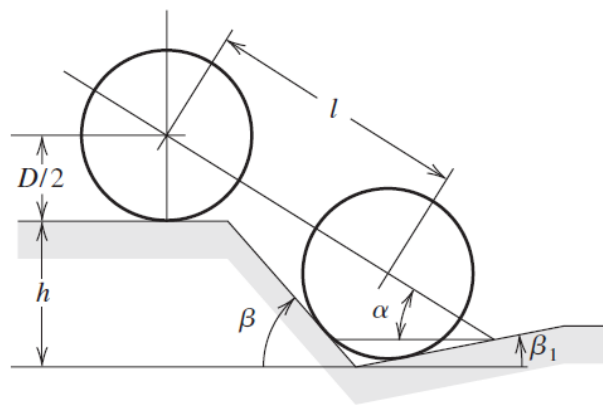
$$A \sin \alpha \cos \alpha + B \sin^2 \alpha - C \cos \alpha + E \sin \alpha = 0,$$

donde

$$A = l \sin \beta_1, \quad B = l \cos \beta_1, \quad C = (h + 0.5D) \sin \beta_1 - 0.5 D \tan \beta_1,$$

$$\text{y } E = (h + 0.5 D) \cos \beta_1 - 0.5 D.$$

- Se establece que cuando $l = 89$ pulgadas, $h = 49$ pulgadas, $D = 55$ pulgadas y $\beta_1 = 11.5^\circ$, el ángulo α es aproximadamente 33° . Verifique el resultado.
- Encuentre α para la situación cuando l, h y β_1 son las mismas en la parte a) pero $D = 30$ pulgadas.

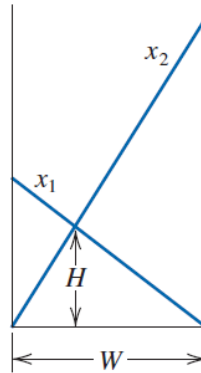


Problema 29, de la sección 2.3 del libro de Richard Burden

7.- Resuelva el siguiente problema usando secante, falsa posición y Newton-Raphson

Error máximo de 1×10^{-4}

Dos escaleras se entrecruzan en un pasillo de ancho W . Cada escalera llega desde la base de una pared hasta algún punto en la pared opuesta. Las escaleras cruzan a una altura H sobre el pavimento. Encuentre W dado que las longitudes de las escaleras son $x_1 = 20$ pies y $x_2 = 30$ pies, y que $H = 8$ pies.



Problema 8, sección 2.6 del libro de Richard Burden

8) Problemas del libro Chapra

5.13 La velocidad v de un paracaidista que cae está dada por

$$v = \frac{gm}{c} (1 - e^{-(c/m)t})$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Para un paracaidista con coeficiente de resistencia de $c = 15 \text{ kg/s}$, calcule la masa m de modo que la velocidad sea $v = 36 \text{ m/s}$ en $t = 10 \text{ s}$. Utilice el método de la falsa posición para determinar m a un nivel de $\varepsilon_s = 0.1\%$.

5.14 Use bisección para determinar el coeficiente de resistencia necesario para que un paracaidista de 82 kg tenga una velocidad de 36 m/s después de 4 s de caída libre. *Nota:* La aceleración de la gravedad es 9.81 m/s^2 . Comience con valores iniciales de $x_l = 3$ y $x_u = 5$. Itere hasta que el error relativo aproximado caiga por debajo de 2% . Realice también una detección de errores sustituyendo su respuesta final en la ecuación original.

5.17 Suponga el lector que está diseñando un tanque esférico (véase la figura P5.17) para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo. El volumen de líquido que puede contener se calcula con

$$V = \pi h^2 \frac{[3R - h]}{3}$$

donde V = volumen [m^3], h = profundidad del agua en el tanque [m] y R = radio del tanque [m].

Si $R = 3$ m, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga 30 m^3 ? Haga tres iteraciones con el método de la falsa posición a fin de obtener la respuesta. Determine el error relativo aproximado después de cada iteración. Utilice valores iniciales de 0 y R .

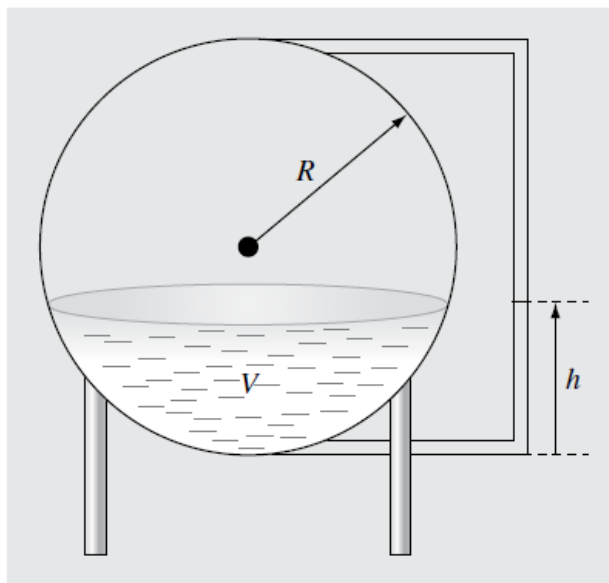


Figura P5.17

9)

a) Obtenga el polinomio interpolante de Lagrange, para los siguientes puntos, considerando que $f(x) = 3x\cos(x + 1) - \sin(x)$

$$x_0 = 2, x_1 = 2.5, x_2 = 3.0, x_3 = 3.5, x_4 = 4, x_5 = 4.5$$

b) Grafique $f(x)$ y $P(x)$ en el intervalo $[0,6]$

10)

a) Obtenga $P(3.3)$ considerando el polinomio interpolante del problema 9, Calcule el error absoluto real $|P(3.3) - f(3.3)|$

b) Obtenga una cota para el error cometido al usar P para aproximar $f(3.3)$. Use Geogebra para obtener, gráficamente, la cota para $\max_{[2, 4.5]} |f^{(vi)}(x)|$. Compare el error real con la cota del error.

11) Use Neville para obtener $P(3.3)$ del problema 9

12) Use diferencias divididas para obtener el polinomio interpolante del problema 9.

SEGUNDO PARCIAL

1.- a) Obtenga la primer derivada de $f(x)$ en cada punto x , considerando los valores de la siguiente tabla. Utilice las fórmulas que proporcionen la mejor aproximación.

x	y_1
0	0
0.2	-0.0072239151267
0.4	0.0130182499766
0.5	0.0531261655831
0.6	0.1078389433542
0.9	0.1001694229381
1.2	-0.5249677656009
1.5	-0.4906053422264

b) Obtenga el polinomio interpolante utilizando diferencias divididas, considerando los puntos $x = 0.5, 0.6, 0.9$. Derive este polinomio y obtenga las aproximaciones a las derivadas en los puntos utilizados en la interpolación.

2.- Utilice interpolación de Neville para obtener la aproximación de $g(0.5)$ considerando los siguiente valores de x y $g(x)$

x	y_1
0	-0.522619127...
0.2	-0.738153655...
0.4	-1.225223431...
0.6	-1.691433626...
0.8	-1.843110246...
1	-1.388325975...

3.- Considerando la siguiente función $g(x) = 6x^3 - 7x^2 - \frac{e^{8/(x+7)}}{x^4+6}$ obtenga una aproximación a $\int_0^1 g(x)dx$ utilizando

a) Cuadratura adaptativa, 4 iteraciones, con $\epsilon \leq 1 \times 10^{-3}$

b) Cuadratura Gaussiana con $n=4$

n	Raíces $r_{n,i}$	Coefficientes $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451

c.1) Considerando que la fórmula del trapecio se puede expresar como:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{MétodoTrapezio} + K_1 h^2 + K_2 h^4 + \dots + K_i h^{2i} + \dots$$

Obtenga la expresión para que por extrapolación se obtengan mejores aproximación a la integral.

c.2) Aplicando la fórmula obtenido en c.1) calcule la aproximación a la integral de $g(x)$ hasta $O(h^6)$

$$\begin{matrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} & R_{2,2} \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{matrix}$$

4.- Un estudio de ingeniería del transporte requiere que se calcule el número total de autos que cruzan por una intersección en un periodo de 24 horas. Un individuo la visita en diferentes momentos durante el curso de un día y cuenta durante un minuto los autos que pasan por la intersección. Utilice los datos que se resumen en la tabla para estimar el número total de autos que cruzan por día (tenga cuidado con las unidades).

Tabla P24.21 Tasa de flujo de tráfico (autos/min) en una intersección medida en diferentes momentos durante un periodo de 24 horas.

Hora	Tasa	Hora	Tasa	Hora	Tasa
12:00 medianoche	2	9:00 a.m.	11	6:00 p.m.	20
2:00 a.m.	2	10:30 a.m.	4	7:00 p.m.	10
4:00 a.m.	0	11:30 a.m.	11	8:00 p.m.	8
5:00 a.m.	2	12:30 p.m.	12	9:00 p.m.	10
6:00 a.m.	6	2:00 p.m.	8	10:00 p.m.	8
7:00 a.m.	7	4:00 p.m.	7	11:00 p.m.	7
8:00 a.m.	23	5:00 p.m.	26	12:00 medianoche	3

5.- Se recolectaron los siguientes datos para una sección transversal de un río (y = distancia de una ribera, H = profundidad y U = velocidad):

y, m	0	1	3	5	7	8	9	10
H, m	0	1	1.5	3	3.5	3.2	2	0
$U, m/s$	0	0.1	0.12	0.2	0.25	0.3	0.15	0

Use integración numérica para calcular:

- a) la profundidad promedio, b) el área de la sección transversal, c) la velocidad promedio y d) el caudal. Observe que el área de la sección transversal (A_c) y el caudal (Q) se pueden calcular como:

$$A_c = \int_0^y H(y) dy \quad Q = \int_0^y H(y)U(y) dy$$

Aplice los métodos combinados que proporcionen las mejores aproximaciones .

TERCER PARCIAL

1.- Obtenga las aproximaciones a la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de valor inicial, aplicando el método de Euler:

a) $y' = t^{-2}(\sin(2t) - 2ty)$ $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 2$, $h = 0.1$

b) $y' = -ty + 4ty^{-1}$ $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = 0.5$, $h = 0.1$

2.- Use el método de Taylor de orden 3 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial:

a) $y' = \cos(2t) + \sin(2t)$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$

b) $y' = t^{-2}(\sin(2t) - 2ty)$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 1$, $h = 0.1$

3.- Resuelva las ecuaciones del problema 2, aplicando el método de Taylor de orden 3.

4.- Use el método de Taylor de orden 4 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial:

a) $y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = 0$, $h = 0.1$

b) $y' = -ty + 4t y^{-1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$

5.- Obtenga el Polinomio de Taylor $P_3(t, y)$ cerca (alrededor) de (1,2) para la función:

$$f(t, y) = e^{\left[-\frac{(t-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4}\right]} \sin(2t + y - 4)$$

Grafique $f(t, y)$ y $P_3(t, y)$

6.- Use el método de Runge-Kutta de orden 4 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial:

6.1)

a. $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \frac{2t+1}{t^2+1}$.

b. $y' = \frac{y^2}{1+t}$, $1 \leq t \leq 2$, $y(1) = \frac{-1}{\ln 2}$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$.

6.2)

Grafique la función de la solución exacta y los puntos obtenidos en las aproximaciones.

6.3) Considerando los valores (t_i, y_i) obtenidos como aproximaciones :

- a) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de grado 3
- b) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma be^{ax}
- c) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma bx^a

¿Cuál aproxima mejor?

b) función de la forma:

7.- Use el método de Runge-Kutta-Fehlberg para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de valor inicial, con una cota del error de 1×10^{-6} . Compare las aproximaciones con la solución exacta.

a) $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2$, $1 \leq t \leq 4$, $y(1) = 1$, sol. real. $y(t) = \frac{t}{1 + \ln(t)}$

b) $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty$, $0 \leq t \leq 2$, $y(0) = \frac{1}{3}$, sol. real. $y(t) = \left(3 + 2t^2 + 6e^{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

8.- Muestre el procedimiento detallado para deducir los métodos de Adams-Bashforth y Adams-Moulton de 2º Orden

9.- Aplique los métodos de Adams-Bashforth de orden 2,3 y 4 para obtener las aproximaciones de los siguientes problemas de valor inicial. Para los valores iniciales use los valores obtenidos con el método de RK-4

a) $y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad y(1) = 0, \quad h = 0.1$

b) $y' = -(y+1)(y+3), \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -2, \quad h = 0.1$

10.- Aplique los métodos de Adams-Moulton de orden 3 y 4 para obtener las aproximaciones de los siguientes problemas de valor inicial. Para los valores iniciales use los valores obtenidos con el método de RK-4

a) $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.1$

b) $y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.1$

11.- Aplique el método de RK-4 para aproximar las soluciones de las siguientes EDO de orden superior.

a) $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \quad 0 \leq t \leq 3, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0, \quad h = 0.1$

b) $t^3 y''' - t^2 y'' + 3ty' - 4y = 5t^3 \ln(t) + 9t^3, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 3, \quad h = 0.1$

12.- Aplique eliminación Gaussiana y aritmética de truncamiento a 4 decimales para resolver los siguientes SEL.

a) $3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953$

$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965$$

$$-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714$$

Solución real: $[1, 0.5, -1]$

b) $2.12x_1 - 2.12x_2 + 51.3x_3 + 100x_4 = \pi$

$$0.333x_1 - 0.333x_2 - 12.2x_3 + 19.7x_4 = \sqrt{2}$$

$$6.19x_1 + 8.20x_2 - 1.00x_3 - 2.01x_4 = 0$$

$$-5.73x_1 + 6.12x_2 + 1.00x_3 - 1.00x_4 = -1$$

Solución real: $[0.0998, -0.0683, -0.0363, 0.0465]$

13.- Resuelva los sistemas del problema 12, aplicando:

a) Pivoteo parcial (máximo de columna)

b) Pivoteo parcial escalado

14.- Factorice las siguientes matrices como un producto LU

a)
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

15.- Obtenga la factorización $A = P^tLU$ para las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

16.- Considerando los siguientes datos:

x_i	4.0	4.2	4.4	4.7	5.2	5.3	5.8	6.3	6.7	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

d) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de grado 4

e) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma be^{ax}

f) Obtenga el polinomio por mínimos cuadrados de la forma bx^a